

# 基于 $\delta$ 型概率密度函数序列的数值 Laplace 反变换新算法

余志勇<sup>1</sup>, 郭金库<sup>1</sup>, 路宏敏<sup>2</sup>

(1. 解放军第二炮兵工程大学, 陕西西安 710025; 2. 西安电子科技大学, 陕西西安 710025)

**摘要:** 利用一类属于“ $\delta$ 型序列”并含有指数因子  $\exp(-st)$  的概率密度函数, 当在大于零的实数半区间上有且只有一个对应于随机变量众数的极值点横坐标时, 将随机变量连续函数的数学期望用该函数的 Laplace 变换表出, 从而导出一种基于  $\delta$  型概率密度函数序列的数值 Laplace 反变换(NILT)算法基本框架, 并把常用的 Stehfest 算法和 Post-Widder 算法统一至该框架之下. 在此基础上, 选择属于“ $\delta$ 型序列”的 Gamma 分布密度函数, 提出一个此类 NILT 算法的新成员.

**关键词:** 数值 Laplace 反变换; 广义函数;  $\delta$  型序列; 概率密度函数

**中图分类号:** TN911.7      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2013) 08-1474-06

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2013.08.004

## Numerical Inversion of Laplace Transforms Base on Sequence of $\delta$ -Type Probability Density Functions

YU Zhi-yong<sup>1</sup>, GUO Jin-ku<sup>1</sup>, LU Hong-min<sup>2</sup>

(1. The Second Artillery Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710025, China; 2. Xi Dian University, Xi'an, Shaanxi 710025, China)

**Abstract:** An algorithm framework of the numerical inversion of Laplace transforms(NILT) based on a class of probability density function, which belongs to the sequence of  $\delta$ -type functions with exponential term  $\exp(-st)$  was presented. If the probability density function defined for all positive variables in the abscissa has and only has an extremum abscissa corresponding to the modal value of random variables, the expectation of a continuous function of random variables can be expressed by the Laplace transform of this function. It is shown that the traditional Stehfest's and Post-Widder's NILT algorithm are two special cases of the proposed algorithm framework. Moreover, an example using the  $\delta$ -type Gamma distribution density function is given to demonstrate that the novel framework can help to develop new NILT algorithms.

**Key words:** numerical inversion of Laplace transforms; generalized function; sequence of  $\delta$ -type functions; probability density function

### 1 引言

作为一种重要的积分变换, Laplace 变换不仅是数学物理领域的重要分析工具, 而且在工程技术中有着广泛的应用. 在工业控制、应用电磁学、地质勘探、油气试井和建筑工程等众多技术领域, 为了迅速地获得问题的 Laplace 变换反演结果, 采用数值 Laplace 反变换(NILT)算法求解已成为最重要的技术途径之一<sup>[1~11]</sup>.

多年以来, NILT 受到国内外学者的广泛关注, 从不同的原理和技术切入点提出了多种 NILT 算法<sup>[4, 12~17]</sup>, 并试图对它们进行比较归类<sup>[18~20]</sup>. NILT 是一个不适宜

(病态)问题<sup>[12, 13, 21]</sup>, 而且算法性能对原象函数的振荡性和衰减性(在实际应用中通常是未知的)非常敏感<sup>[20, 22]</sup>, 因而至今还难以找到完备的方法对其进行比较评价, 只能采用已知原象函数的象函数进行 NILT 测试<sup>[18~20]</sup>, 或进一步整理有代表性的象函数构成“标准”测试集以方便测试时查用<sup>[22]</sup>; 而且, 从多年的研究进展来看, 比较归类 NILT 算法仍然是一件具有挑战性的工作<sup>[19, 20, 22]</sup>, 多数算法以作者名字命名, 难以从名称中直观反映出算法的原理或技术特点, 或多或少给算法的应用和改进带来了不便.

本文通过分析比较 Stehfest 算法<sup>[14, 15]</sup>和 Post-Widder

算法<sup>[16,17]</sup>,抽取其共性原理而导出一个统一的 NILT 算法框架——以广义函数理论和概率统计理论为基础,利用一类属于“ $\delta$  型序列”并包含  $\exp\{-s_v t\}$  因子的概率密度函数  $f_v(t) \rightarrow \delta(t - \tau) (v \rightarrow \infty)$ , 将求随机变量的均值与 Laplace 变换公式

$$Y(s_v) = \int_0^{\infty} y(t) \exp(-s_v t) dt$$

联系起来,导出基于  $\delta$  型概率密度函数序列的 NILT 算法公式. 至今鲜见对这两种算法进行类似研究的文献,故本文将其归类为“ $\delta$  型序列 NILT 算法”,以便于此类 NILT 算法的应用、改进或为本类算法增加新的成员.

## 2 $\delta$ 型序列

设在实轴  $R$  上局部可积的函数序列  $\{f_v(t)\}$  为“正则泛函序列”<sup>[23]</sup>; 若极限

$$\lim_{v \rightarrow \infty} f_v(t) = \delta(t - \tau) \quad (1)$$

成立,则称函数序列  $\{f_v(t)\}$  为关于实参  $v \rightarrow \infty$  的“ $\delta$  型序列”<sup>[23,24]</sup>. 其中,  $\delta(\cdot)$  为 Dirac- $\delta$  函数,  $\tau$  为  $f_v(t)$  曲线取极大值时所对应的横坐标当  $v \rightarrow \infty$  时的极限值. 由于 Dirac- $\delta$  函数属于广义函数,故式(1)不能完全按普通函数(或称基本函数)的极限来理解. 为简便计,常称式(1)为“收敛于广义函数的极限”,并称序列  $\{f_v(t)\}$  是关于参数  $v \rightarrow \infty$  一致收敛的. 此时,对函数  $f_v(t)$  求积分(微分)和求极限运算可以交换顺序,这是一致收敛正则泛函序列所具有的基本特征<sup>[23,24]</sup>. 为了证明符合条件的概率密度函数为“ $\delta$  型序列”,则需要用到下面的推论<sup>[23]</sup>:

**推论** 设局部可积函数序列

$$F_v(t) = \int_{-1}^t f_v(t) dt, v \rightarrow \infty \quad (2)$$

若  $F_v(t)$  在实轴  $R$  上的任何闭区间  $[p, q]$  上对参数  $v$  一致有界(其上、下界可与  $p, q$  无关),且当  $v \rightarrow \infty$  时  $F_v(t)$  几乎处处收敛于 Heaviside 函数(单位阶跃函数)  $u(t - \tau)$ , 则式(2)中的  $f_v(t)$  为“ $\delta$  型序列”.

利用该推论,并根据概率累积分布函数和概率密度函数的性质<sup>[25]</sup>,易证满足以下条件的概率密度函数  $f_v(t)$  必为“ $\delta$  型序列”:

$$\textcircled{1} f_v(t) \begin{cases} > 0, t \in (0, +\infty) \\ \leq 0, t \in (-\infty, 0] \end{cases}$$

$\textcircled{2}$  曲线  $f_v(t)$  在实数半区间  $(0, +\infty)$  上有且只有一个极值横坐标点  $\tau$ , 并必为众数 (Modal Value),

$\textcircled{3}$  曲线  $f_v(t)$  在横坐标上随参数  $v \rightarrow \infty$  向极值坐标点  $\tau$  收缩.

实际上,由概率密度函数的性质,易由条件 $\textcircled{2}$ 推断出条件 $\textcircled{3}$ ;反之亦然.也就是说,条件 $\textcircled{3}$ 和条件 $\textcircled{2}$ 是等价的.若概率密度函数  $f_v(t)$  满足条件 $\textcircled{1}$ ,则式(2)中的

$F_v(t)$  即等于与  $f_v(t)$  对应的概率累积分布函数,故  $F_v(t)$  必然在任何闭区间上对参数  $v$  一致有界;由于  $f_v(t)$  满足条件 $\textcircled{2}$ 或 $\textcircled{3}$ ,那么随机变量  $T$  落入坐标  $\tau$  的无穷小邻域  $(\tau - \Delta, \tau + \Delta)$  内  $(\Delta \rightarrow 0^+)$  的概率

$$P(\tau - \Delta < T < \tau + \Delta) = \int_{\tau - \Delta}^{\tau + \Delta} f_v(t) dt \rightarrow 100\%$$

因此,必然有

$$F_v(t) = \int_{-1}^t f_v(t) dt = \begin{cases} 0, t < \tau - \Delta \\ 1, t \geq \tau + \Delta \end{cases}, v \rightarrow \infty \\ = u(t - \tau), v \rightarrow \infty, \Delta \rightarrow 0^+$$

所以  $f_v(t)$  为“ $\delta$  型序列”. 为方便计,本文称之为“ $\delta$  型概率密度函数序列”.

下面,为了利用“ $\delta$  型概率密度函数序列”归类抽取 Stehfest 算法和 Post-Widder 算法的共性原理,将简要给出这两种算法的导出过程,并把它们放在一起以便进行对比分析.

## 3 算法对比分析

### 3.1 算法公式

Stehfest 算法是由 H Stehfest 在 D P Gaver 的研究成果<sup>[16]</sup>基础上于 1970 年提出的,而 Post-Widder 算法是由 D L Jagerman 应用 D V Widder 著作中的成果<sup>[17]</sup>于 1978 年提出的. Stehfest 算法和 Post-Widder 算法的关键区别在于,两者采用了不同的概率密度函数.

Stehfest 算法采用的概率密度函数为

$$f_{m,n}(t; a) = \frac{(n+m)!}{n!(m-1)!} a [1 - e^{-at}]^n e^{-mat} \quad (3)$$

其中各参、变量均取实数,要求  $a > 0, 0 < t < \infty, m = 1, 2, \dots, \infty, n = 0, 1, 2, \dots, \infty$ . 而 Post-Widder 算法采用的概率密度函数为

$$f_k(t; \mu) = \frac{k}{\mu} \exp\left(-\frac{kt}{\mu}\right) \frac{\left(\frac{kt}{\mu}\right)^{k-1}}{\left(\frac{\mu}{k-1}\right)!} \quad (4)$$

其中,  $0 < t < \infty, \mu$  为均值,  $k = \frac{\mu^2}{\sigma^2}$  ( $\sigma$  为标准差). 显然,由定义可知式(3)、(4)均满足条件 $\textcircled{1}$ . 连续采用分部积分法,容易验证式(3)、(4)均满足概率密度函数的性质. 式(3)中的参数  $n, m$  和式(4)中的参数  $k$  则对应着式(1)中的参数  $v$ .

为了求得与式(1)中对应的参数  $\tau$ ,则需要对式(3)和式(4)分别求极值. 为此,对式(3)和式(4)分别求相对于变量  $t$  的一阶导数并解方程

$$\frac{(n+m)!}{n!(m-1)!} a^2 \{ (1 - e^{-at})^{n-1} e^{-mat} [(n+m)e^{-at} - m] \} = 0$$

$$\frac{k^2}{\mu^2} \exp\left(-\frac{kt}{\mu}\right) \left[ \frac{(k-1) \left(\frac{kt}{\mu}\right)^{k-2} - \left(\frac{kt}{\mu}\right)^{k-1}}{(k-1)!} \right] = 0$$

从而得到式(3)对应的随机变量众数为

$$\tau_{m,n} = -\frac{1}{a} \ln \frac{m}{m+n} \quad (5)$$

式(4)对应的随机变量众数为

$$\tau_k = \frac{k-1}{k} \mu \quad (6)$$

而且对式(5)、(6)分别取当  $m, n \rightarrow \infty$  和  $k \rightarrow \infty$  时的极限,有

$$\lim_{m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} \tau_{m,n} = -\frac{1}{a} \ln 2 \quad (5a)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = \mu \quad (6a)$$

由此可知,式(3)、(4)都有且只有一个极值点横坐标,即满足条件②或③.所以,式(3)(4)属于“ $\delta$ 型序列”,即

$$\lim_{m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} f_{m,n}(t; a) = \delta(t - a^{-1} \ln 2) \quad (7)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(t; \mu) = \delta(t - \mu) \quad (8)$$

设  $y(t)$  为实轴上的连续函数,  $T_{m,n}$ 、 $T_k$  分别为对对应于概率密度函数(3)、(4)的随机变量.那么,随机变量  $Y_{m,n} = y(T_{m,n})$  和  $Y_k = y(T_k)$  的数学期望分别为<sup>[25]</sup>

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{m,n} &= E\{Y_{m,n}\} = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) f_{m,n}(t; a) dt \\ &= \frac{a(n+m)!}{n!(m-1)!} \sum_{k=0}^n [(-1)^k C_n^k \int_0^{\infty} y(t) e^{-(m+k)at} dt] \\ &= \frac{a(n+m)!}{n!(m-1)!} \sum_{k=0}^n [(-1)^k C_n^k Y_L((m+k)a)] \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{Y}_k &= E\{Y_k\} = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) f_k(t; \mu) dt \\ &= \frac{k^k}{\mu^k (k-1)!} \int_0^{\infty} y(t) t^{k-1} \exp\left(-\frac{k}{\mu} t\right) dt \\ &= (-1)^{k-1} [(k-1)!]^{-1} \left(\frac{k}{\mu}\right)^k Y_L^{(k-1)}\left(\frac{k}{\mu}\right) \quad (10) \end{aligned}$$

式中,  $E\{\cdot\}$  表示求数学期望;  $Y_L(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$  为函数  $y(t)$  的 Laplace 变换,  $Y_L^{(k-1)}(s)$  为  $Y_L(s)$  相对于其自变量  $s$  的  $(k-1)$  阶导数.式(9)中  $C_n^k = \frac{n!}{[k!(n-k)!]}$  为二项式系数,式(10)中应用了 Laplace 变换的象函数微分性质<sup>[26]</sup>

$$\mathcal{L}\{t^k y(t)\} = (-1)^k Y^{(k)}(s)$$

对式(9)(10)两式取极限,易得

$$y\left(\frac{\ln 2}{a}\right) = \lim_{m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} \frac{a(n+m)!}{n!(m-1)!} \sum_{k=0}^n [(-1)^k C_n^k Y_L((m+k)a)] \quad (11)$$

$$y(\mu) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \left(\frac{k}{\mu}\right)^k Y_L^{(k-1)}\left(\frac{k}{\mu}\right) \quad (12)$$

由于式(11)、(12)均由一致收敛的正则泛函序列导出,故它们的极限一定是存在的.将它们截断取有限项,并令式(11)中的  $m = n = N$ ,式(12)中的  $k = N$ ,即可得到 Stehfest 算法的 Gaver 近似公式<sup>[16]</sup>

$$y(t) \approx \frac{(2N)! \ln 2}{N! (N-1)! t} \sum_{k=0}^N \left[ (-1)^k C_N^k Y_L\left(\frac{(N+k) \ln 2}{t}\right) \right] \quad (11a)$$

和 Post-Widder 算法的近似公式<sup>[16,17]</sup>

$$y(t) \approx \frac{(-1)^{N-1}}{(N-1)!} \left(\frac{N}{t}\right)^N Y_L^{(N-1)}\left(\frac{N}{t}\right) \quad (12a)$$

若采用 Stehfest 算法的 Gaver 近似式(11a)计算 NILT,其收敛速度很慢;而且,式中阶乘运算的存在限制了  $N$  的取值在常用的 32 位计算机上不宜超过 20,否则会有较大的舍入误差.为此,可采用“极限外推”方法对式(11a)进行加速收敛处理,得到 Stehfest 算法公式为<sup>[14]</sup>

$$y(t) \approx t^{-1} \ln 2 \sum_{k=1}^N V_k Y(t^{-1} k \ln 2) \quad (11b)$$

其中,系数  $V_k$  应由 Stehfest 修正的公式<sup>[15]</sup>

$$V_k = (-1)^{\frac{N}{2} + k} \frac{\sum_{r=0}^{\min(k, \frac{N}{2})} \frac{N}{r! 2(2r)!}}{r! \left[\frac{(k+1)}{2}\right]! \left(\frac{N}{2} - r\right)! r! (r-1)! (k-r)! (2r-k)!} \quad (11c)$$

因为  $V_k$  的原始公式存在一个小错误<sup>[14]</sup>,经验算不可能得到正确结果.某些文献<sup>[6-8]</sup>采用原始  $V_k$  公式<sup>[14]</sup>或其它错误公式<sup>[5]</sup>却能得到正确结果,则令人相当费解.

在 Post-Widder 算法的近似公式(12)中,需要求

$Y_L(s)$  的多重微分.由于式中总是取  $s = \frac{k}{\mu}$ ,那么必然有  $\text{Re}\{s\} \geq 0$ ,所以式中求象函数相对于  $s$  的多重微分是允许的<sup>[17]</sup>.同理,由于阶乘运算的存在,  $N$  不宜取得过大,这时式(12)中的  $\mu$  可由式(6)中的  $\tau_k$  来代替,于是 Post-Widder 算法公式可改写为

$$y(t) \approx \frac{(-1)^{N-1}}{(N-1)!} \left(\frac{N-1}{t}\right)^N Y^{(N-1)}\left(\frac{N-1}{t}\right) \quad (12b)$$

特别地,当式(12b)计算一个特殊的 Laplace 反变换时,

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = s^{-1}$$

求其  $N-1$  阶导数,得

$$(s^{-1})^{(N-1)} = (-1)^{N-1} (N-1)! s^{-N}$$

取  $s = (N-1)/t$  并将上式代入式(12b),易得

$$y(t) = 1 = u(t), \quad t > 0$$

即获得了精确解.

### 3.2 算法讨论

关于 Stehfest 算法和 Post-Widder 算法在应用中需要注意的一般性问题,已有较多的文献进行过讨论<sup>[4-9,11,14-17]</sup>,这里不再赘述.下面重点讨论三个问题:

(1)为提高计算效率,两算法都需要“预先计算”.Stehfest 算法公式(11b)中的系数  $V_k$  与原象自变量  $t$  无关,只要确定了求和项数  $N$  就可提前将所有  $V_k (k=1, \dots, N)$  计算出来.应用 Post-Widder 算法公式(12b)时需要求解象函数的  $(N-1)$  阶导数,为避免取不同  $t$  值时的重复计算,可采用 MatLab 符号运算工具包等软件工

具把它提前计算出来。

(2) 该类算法只适于已知象函数解析式的情况,不适于测量数据的场合。式(11b)还可以通过恰当的试验设计来解决测量数据的问题,而式(12b)由于需要求解象函数的高阶导数,就很难用来解决测量数据的 Laplace 反变换问题了。

(3) 可由“ $\delta$  型概率密度函数序列”的方差变化情况直观地比较算法性能。虽然还未找到能很好地用于检验 NILT 算法性能的普适性方法,但对于该类算法则可以通过比较方差变化情况的来判断算法的精度。在其它参数相同的条件下,方差较大的情况算法精度相对较差。比如,在式(11b)(12b)中取相同的参数  $N$  和原象自变量  $t = \tau_k$ , 计算两式所对应的方差分别为:

$$\sigma_{11}^2 = \tau_k^{-2} \sum_{r=0}^N (N + r)^{-2}, \sigma_{12}^2 = \tau_k^2 / N$$

其中下标“11”、“12”代表式(11b)、(12b)。取典型值  $N = 15$  并取  $\tau_k = 0.5, 1, 1.5, \dots, 5.5$ , 得到计算结果如图 1 所示,显然 Stehfest 算法应该具有更好的精度。因为  $\sigma_{12}^2$  随着自变量的增大而显著增大,导致 Post-Widder 算法公式(12a)在近似表示公式(12)时误差增大,从而使计算精度随着原象自变量  $t$  的增加而变差。这一结论可以通过一个实例<sup>[22]</sup>的计算结果直观地展现出来如图 2 所示:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\frac{1}{s}} \right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos(\sqrt{4t}) \quad (13)$$

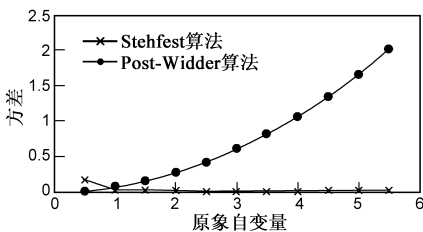


图1 采用方差变化比较算法性能

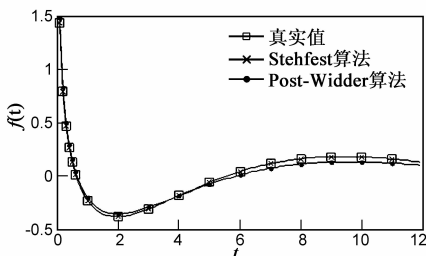


图2 实例式(13)的计算结果

## 4 统一算法框架及应用

### 4.1 $\delta$ 型序列 NILT 算法

由上述 Stehfest 算法和 Post-Widder 算法的推导过

程,不难将它们纳入到以下的统一的理论框架之中:

设随机变量  $T_v (v \rightarrow \infty)$  的概率密度函数  $f_v(t)$  是满足前述条件①~③的“ $\delta$  型序列”,即

$$\lim_{v \rightarrow \infty} f_v(t) = \delta(t - \tau_v)$$

其中  $\tau_v$  为众数(Modal Value)的极限。又设  $y(t)$  为连续函数,那么随机变量  $Y_v = y(T_v)$  的数学期望  $\bar{Y}_v$  可表示为

$$\bar{Y}_v = E\{Y_v = y(T_v)\} = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) f_v(t) dt$$

根据“ $\delta$  型序列”的基本特征,当  $v \rightarrow \infty$  时数学期望  $\bar{Y}_v$  将趋于极限  $y(\tau_v)$ , 即

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow \infty} \bar{Y}_v &= \lim_{v \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) f_v(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \delta(t - \tau_v) dt = y(\tau_v) \end{aligned} \quad (14)$$

接着,需要选择适当的概率密度函数  $f_v(t)$  把上式与连续函数  $y(t)$  的 Laplace 变换

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \int_0^{\infty} y(t) e^{-st} dt$$

联系起来。这里,选择一类形如

$$f_v(t) = \begin{cases} g\{e^{-s_v t}\}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

的概率密度函数,且函数  $g\{\cdot\}$  满足

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} y(t) g(e^{-s_v t}) dt &= g\left\{ \int_0^{\infty} y(t) e^{-s_v t} dt \right\} \\ &= g\{Y(s_v)\} \end{aligned}$$

由于  $g\{\cdot\}$  是将  $f_v(t)$  中指数因子  $e^{-s_v t}$  抽取出来以后的连续函数,对上式取  $v \rightarrow \infty$  的极限时,求极限与求积分的次序可以交换,于是由式(14)可得

$$y(\tau_v) = \lim_{v \rightarrow \infty} \bar{Y}_v = \lim_{v \rightarrow \infty} g\{Y(s_v)\} \quad (15)$$

以上各式中,  $|s_v| > 0$  且只与参数  $v$  有关。

综上所述,可见“ $\delta$  型序列 NILT 算法”的关键在于根据具体的概率密度函数来确定  $g\{\cdot\}$  的最终形式,以便于进行数值 Laplace 反变换计算。既然  $g\{\cdot\}$  是连续的且与  $f_v(t)$  等价( $t > 0$ ),那么式(15)的极限存在且具有与  $f_v(t)$  一致的收敛性,因而可取有限项  $Y(s_v)$  由近似求解出在  $\tau_v$  处的原象值  $y(\tau_v)$ 。至此,已利用“ $\delta$  型序列”理论将 Stehfest 算法和 Post-Widder 算法纳入到统一的算法框架之中,下面则应用该算法框架提出一个新成员。

### 4.2 算法新成员

根据上述理论框架,先寻找一个符合条件的概率密度函数,比如 Gamma 分布密度函数<sup>[25]</sup>

$$f_v(t; a) = \frac{v^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-vt} \quad (16)$$

求导并求解方程

$$\frac{v^a}{\Gamma(a)} e^{-vt} t^{a-2} [(a-1) - vt] = 0$$

可得众数

$$\tau_v = \frac{a-1}{v} \quad (17)$$

由式(15)可得

$$y(\tau_v) = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{a-1} v^a}{\Gamma(a)} Y_L^{(a-1)}(v)$$

于是得到“ $\delta$ 型序列 NILT 算法”新成员的近似公式为

$$y(t) \approx (-1)^{a-1} \frac{(a-1)^a}{\Gamma(a) t^a} Y_L^{(a-1)}\left(\frac{a-1}{t}\right) \quad (18)$$

注意到式(18)中并没有参数  $v$ , 但它隐含在式(17)当中. 为了保证必要的近似精度, 就需要取较大的  $v$  值; 但是, 当原象函数的自变量  $t$  取较大值时, 只有取很大的  $a$  值才能使式(17)成立.

因此, 这个 NILT 算法的新成员需要取较大的  $a$  值才能达到要求的精度; 而且, 由于 Gamma 分布的方差将随着  $t$  值的增加而增大, 所以该新算法与 Post-Widder 算法类似, 其精度将随着  $t$  值的增加而变差. 利用式(18)求解实例式(13)的结果如图 3 所示, 显示式(18)是正确的; 而且, 取不同  $a$  值的曲线非常直观地显示了上述分析结论.

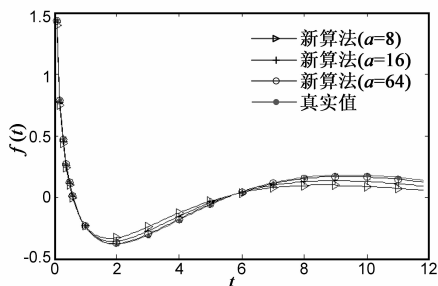


图3 应用新算法计算式(13)的结果

## 5 结论

基于“ $\delta$ 型概率密度函数序列”提出了一种新的“ $\delta$ 型序列 NILT 算法”, 并把 Stehfest 算法和 PostWidder 算法纳入到该算法的统一理论框架之下. 以该算法框架为模板, 利用 Gamma 分布概率密度函数, 提出了一个该类 NILT 算法的新成员.

## 参考文献

- [1] 毛军发, 李征帆. 传输线时域响应分析中的改进 NILT 方法[J]. 电子学报, 1995, 23(3): 55-57.  
Mao Junfa, Li Zhengfan. Modified NILT method for time response analysis of transmission lines[J]. Acta Electronica Sinica, 1995, 23(3): 55-57. (in Chinese)
- [2] 郭裕顺. 用 NILT 导出的传输线瞬态分析模型[J]. 电子学报, 2002, 30(3): 381-385.  
Guo Yushun. Transmission line model for transient simulation derived using the NILT technique transmission Lines[J]. Acta

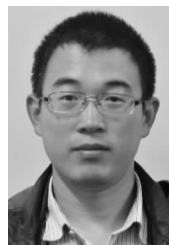
- Electronica Sinica, 2002, 30(3): 381-385. (in Chinese)
- [3] 郭裕顺. 用基于 Chebyshev 展开的 NILT 进行传输线的瞬态分析[J]. 电子学报, 1999, 27(8): 38-41.  
Guo Yushun. Transient analysis of transmission lines using chebyshev expansion based NILT[J]. Acta Electronica Sinica, 1999, 27(8): 38-41. (in Chinese)
- [4] 金瑞椿, 侯志坤, 徐植信. 拉氏变换数值求逆的一种新方法及其在波传播问题中的应用[J]. 同济大学学报, 1985, (3): 97-108.  
Jin Ruichun, Hou Zhikun, Xu Zhixin. A new method of numerical inversion of laplace transformation and Its application to the wave propagation problems[J]. Journal of Tongji University, 1985, (3): 97-108. (in Chinese)
- [5] 何光渝, 李伦. AWG 拉普拉斯数值反演方法在有限导流垂直裂缝流动中的应用[J]. 石油勘探与开发, 1995, 22(1): 47-50.  
He Guangyu, Li Lun. An application of AWG method of numerical inversion of laplace transform for flow in a fluid finite-conductivity vertical fractures[J]. Petroleum Exploration and Development, 1995, 22(1): 47-50. (in Chinese)
- [6] 候晓春, 王晓冬. Stehfest 算法在试井分析中的应用扩展[J]. 油气井测试, 1996, 5(4): 21-24.
- [7] 刘启国, 陈彦丽, 张烈辉, 等. 不关井干扰试井模型和解释方法研究[J]. 油气井测试, 2006, 15(1): 10-12.  
Liu Qiguo, Chen Yanli, Zhang Liehui, et al. Study for disturbing test model with the well opening and its interpreting method [J]. Well Testing, 2006, 15(1): 10-12. (in Chinese)
- [8] 彭述权, 朱平华, 俞静, 等. 高层建筑基础大体积砼和土壤耦合温度场计算[J]. 武汉理工大学学报, 2003, 25(9): 56-59.  
Peng Shuquan, Zhu Pinghua, Yu Jing, et al. Calculation of coupled temperature field between mass concrete of foundation and soil in High-rise building[J]. Journal of Wuhan University of Technology, 2003, 25(9): 56-59. (in Chinese)
- [9] 冯强, 蒋斌松. 寒区隧道温度场 Laplace 变换解析计算[J]. 采矿与安全工程学报, 2012, 29(3): 391-395.  
Feng Qiang, Jiang Binsong. Analytical calculation on temperature field of tunnels in cold region by laplace integral transform [J]. Journal of Mining & Safety Engineering, 2012, 29(3): 391-395. (in Chinese)
- [10] 刘春旭, 董金田, 刘绍武. 具有环形窜流带的地质模型解析解[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 1997, 14(1): 30-32.  
Liu Chunxu, Dong Jintian, Liu Shaowu. The analytic solutions of a geological model with ringlike vertical crossflow area[J]. Journal of Natural Science of Heilongjiang University, 1997, 14(1): 30-32. (in Chinese)
- [11] 李建慧, 朱自强, 刘树才, 等. 基于 Gaver-Stehfest 算法的矩形发射回线激发的瞬变电磁场[J]. 石油地球物理勘

- 探, 2011, 46(3): 489 - 492.
- Li Jianhui, Zhu Ziqiang, Liu Shucai, et al. Rectangular loop transient electromagnetic field expressed by Gaver-Stehfest algorithm[J]. Oil Geophysical Prospecting, 2011, 46(3): 489 - 492. (in Chinese)
- [12] 王泽文, 刘龙章, 徐定华. 数值 Laplace 逆变换的矩方法[J]. 科技通报, 2005, 21(5): 510 - 513.
- Wang Zewen, Liu Longzhang, Xu Dinghua. Numerical Inversion of Laplace Transforms Using Moment Method[J]. Bulletin of Science and Technology, 2005, 21(5): 510 - 513. (in Chinese)
- [13] 周又和, 王记增, 郑晓静. 一种基于小波尺度函数变换的 Laplace 反演方法[J]. 数学物理学报, 2001, 21A(1): 86 - 93.
- Zhou Youhe, Wang Jizeng, Zheng Xiaojing. A numerical inversion of the Laplace transform by use of the scaling function transform of wavelet theory[J]. Acta Mathematica Scientia, 2001, 21A(1): 86 - 93. (in Chinese)
- [14] Harald Stehfest. Algorithm 368 numerical inversion of laplace transforms[D5][J]. Communications of the ACM, 1970, 13(1): 47 - 48.
- [15] Harald Stehfest. Remark on algorithm 368[D5] numerical inversion of Laplace transforms[J]. Communications of the ACM, 1970, 13(10): 624.
- [16] D P Gaver Jr. Observing stochastic processes, and approximate transform inversion [J]. Operations Research, 1966, 14(3): 444 - 459.
- [17] D V Widder. The Laplace Transform[M]. USA: Princeton University Press, Princeton, N J, 1946.
- [18] 冯志刚, 周建平. 基于直接数值积分的 Laplace 逆变换方法的比较研究[J]. 应用数据与计算数学学报, 1997, 11(1): 33 - 40.
- Feng Zhigang, Zhou Jianping. The comparison of 24 numerical inversion methods of laplace transform relating to direct numerical integral[J]. Communication on Applied Mathematics and Computation, 1997, 11(1): 33 - 40. (in Chinese)
- [19] 张伟. 六种数值 Laplace 逆变换方法的评价[J]. 佳木斯大学学报(自然科学版), 2002, 20(1): 113 - 117.
- Zhang Wei. An evaluation on six methods based on the numerical inversion of laplace transformation[J]. Journal of Jiamusi University(Natural Science Edition), 2002, 20(1): 113 - 117. (in Chinese)
- [20] D Brian, M Brain. Numerical inversion of the laplace transform-a survey and comparison of method[J]. Journal of Computer Physics, 1979, (33): 1 - 32.
- [21] 韩光松, 余志勇. Laplace 变换数值反演的参数选择[J]. 兰州大学学报(自然科学版), 2009, 45(z1): 118 - 121.
- Han Guangsong, Yu Zhiyong. Parameters determination in numerical inversion of Laplace transforms [J]. Journal of Lanzhou University(Natural Sciences), 2009, 45(z1): 118 - 121. (in Chinese)
- [22] Petr P Valkó, Sandor Vajda. Inversion of noise free laplace transforms: towards a standardized set of test problems[J]. Inverse Problems in Engineering, 2002, 10(5): 467 - 483.
- [23] N M 盖尔芳特, E. 希洛夫. 广义函数 I-广义函数及其运算[M]. 林坚冰, 译. 北京: 科学出版社, 1965: 3 - 33.
- [24] 祝同江.  $\delta$  型序列的判别准则[J]. 北京理工大学学报, 2000, 20(4): 397 - 400.
- Zhu Tongjiang. A criterion on a sequence of  $\delta$  type functions [J]. Journal of Beijing Institute of Technology, 2000, 20(4): 397 - 400. (in Chinese)
- [25] 陈希孺. 概率论与数理统计[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1992: 42 - 100.
- [26] 熊大国. 积分变换[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1990: 129 - 146.

#### 作者简介



余志勇(通信作者) 男, 1972年4月出生  
于湖北恩施, 2003年获第二炮兵工程大学工学  
博士学位, 中国电子学会电磁兼容分会高级会  
员. 主要研究方向: 电磁环境效应与频谱管理.  
E-mail: yutouzy@163.com



郭金库 男, 1980年6月出生  
于山东菏泽, 2010年获清华大学工学博士学位.  
主要研究方向: 信号时频分布与稀疏表示.  
E-mail: gjk05@mails.tsinghua.edu.cn